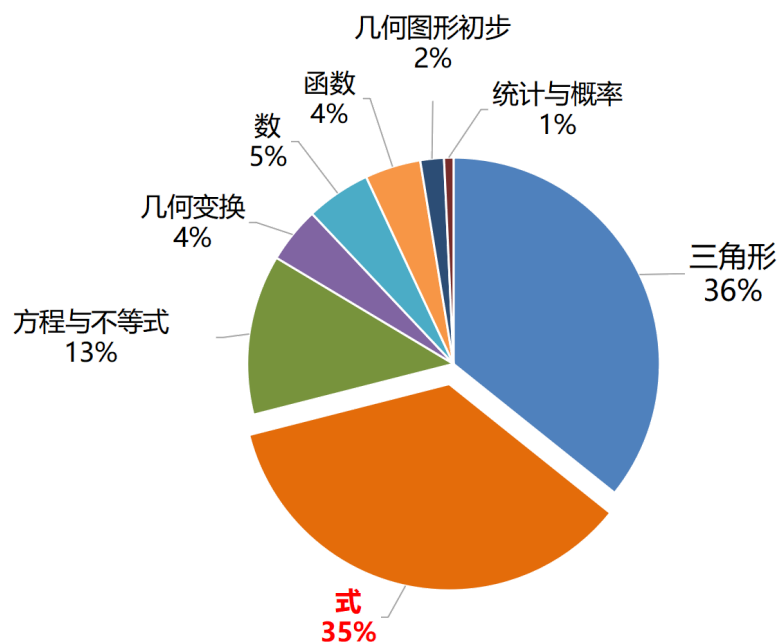


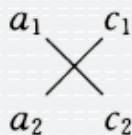
因式分解进阶一

知己知彼



【复习】用十字相乘法进行因式分解的步骤：

对 $ax^2 + bx + c$ ，其中 $a_1a_2 = a$ ， $c_1c_2 = c$ 为常数，



把二次项系数、常数项作拆分分别写在第一列和第二列，列出十字、计算交叉相乘相乘的结果，如果与原式一次项系数相等，那么就把每一行的两个数分别当作每个因式的一次项系数和常数项，完成因式分解；如果与原式一次项系数不相等，那就再重复上面的过程、再列十字。

一、系数为整式的十字相乘法

1. 系数是一次式

如，对于 $(a-b)x^2 + 2ax + a+b$ ，“二次项”系数是 _____、“常数项”是 _____，它们都是关于 a 、 b 的 _____ 次式、只能分解为 1 与本身或 -1 与相反数的乘积，从而可以画出以下十字：

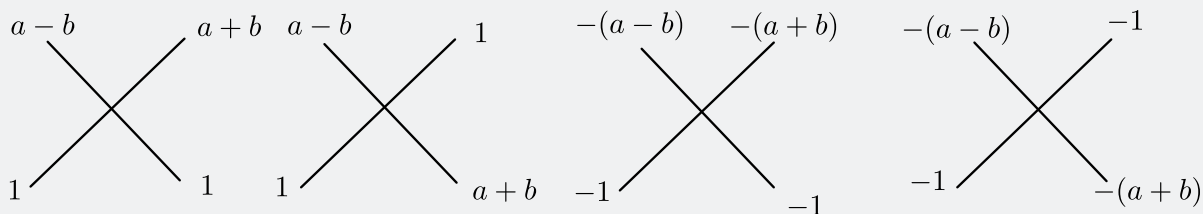


根据乘积是“一次项”系数的十字，

$(a-b)x^2 + 2ax + a+b$ 可因式分解为 _____。

【教法备注】

如，对于 $(a-b)x^2 + 2ax + a+b$ ，“二次项”系数是 $a-b$ 、“常数项”是 $a+b$ ，它们都是关于 a 、 b 的一次式、只能分解为 1 与本身或 -1 与相反数的乘积，从而可以画出以下十字：



根据乘积是“一次项”系数的十字，

$(a-b)x^2 + 2ax + a+b$ 可因式分解为 $(ax - bx + a + b)(x + 1)$ 。

|| 例题

1. 分解因式：

(1) $ax^2 + (a+b)x + b$ 。

(2) $ax^2 + (ab + 1)x + b$.

(3) $(a - b)x^2 + 2ax + a + b$.

【答案】 (1) $(ax + b)(x + 1)$.

(2) $(ax + 1)(x + b)$.

(3) $(ax - bx + a + b)(x + 1)$.

【解析】 (1) 略

(2) 略

(3) 略

【标注】【知识点】十字相乘法

2. 分解因式： $(k + 2)x^2 - (4k + 5)x + 3(k - 1)$.

【答案】 $(kx + 2x - k + 1)(x - 3)$.

【解析】 $(k + 2)x^2 - (4k + 5)x + 3(k - 1) = (kx + 2x - k + 1)(x - 3)$.

【标注】【知识点】系数为整式的十字相乘

练习

3. 因式分解 $kx^2 + (2k - 3)x + k - 3 = (\quad)$.

A. $(x + 1)(kx + k - 3)$ B. $(x + k - 3)(kx + 1)$ C. $(x - 1)(kx + k - 3)$ D. 无解

【答案】A

【解析】根据十字相乘：原式 $= (x+1)(kx+k-3)$ ，
故选A。

【标注】【知识点】二次项系数不为 ± 1 的十字相乘

4. 因式分解： $ax^2 + (3a+5)x + 2(a+5)$ 。

【答案】 $(ax+a+5)(x+2)$ 。

【解析】 $ax^2 + (3a+5)x + 2(a+5) = (ax+a+5)(x+2)$ 。

【标注】【知识点】与提公因式结合的十字相乘

2. 系数有二次式

如 $3ma^2 - 2mb^2 + (6 - m^2)ab$ ，如果把它看成关于 a 、 b 的二次式，那么“二次项”系数为 _____，
“常数项”为 _____，由于“一次项”系数出现 6 ，所以要将“二次项”系数、“常数项”分别分解出 _____ 和 _____ 并放在十字的对角线位置，由于“一次项”系数出现 $-m^2$ ，所以要将“二次项”系数、“常数项”分别分解出 _____ 和 _____ 并放在十字的对角线位置，即



从而这个多项式可因式分解为 _____。

【教法备注】

如 $3ma^2 - 2mb^2 + (6 - m^2)ab$ ，

如果把它看成关于 a 、 b 的二次式，那么“二次项”系数为 $3m$ ，“常数项”为 $2m$ ，由于“一次项”系数出现 6 ，所以要将“二次项”系数、“常数项”分别分解出 3 和 2 并放在十字的对角线位置，由于

“一次项”系数出现 $-m^2$ ，所以要将“二次项”系数、“常数项”分别分解出 m 和 $-m$ 并放在十字的对角线位置，从而这个多项式可因式分解为 $(3a - mb)(ma + 2b)$ 。

|| 例题

5. 分解因式：

(1) $32 - 12x - 27x^2$.

(2) $abcx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + abc$.

【答案】 (1) $-(3x + 4)(9x - 8)$.

(2) $(abx + c)(cx + ab)$

【解析】 (1) $32 - 12x - 27x^2 = -(-32 + 12x + 27x^2) = -(3x + 4)(9x - 8)$.

(2) $abcx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + abc = (abx + c)(cx + ab)$.

【标注】【知识点】二次项系数不为 ± 1 的十字相乘

6. 分解因式 $(k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72$.

【答案】 $[(k + 1)x - 12][(k - 1)x - 6]$.

【解析】 $(k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72$
 $= (k + 1)(k - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72$,
 $= [(k + 1)x - 12][(k - 1)x - 6]$.

【标注】【知识点】系数为整式的十字相乘

练习

7. 因式分解 $mx^2 - (m^2 + m + 1)x + m^2 + m = (\quad)$.

A. $(x + m)(mx + m + 1)$

B. $(x - m)(mx - m - 1)$

C. $m(x - 1)(x - m - 1)$

D. 无解

【答案】 B

【解析】 根据十字相乘, 原式 $= (x - m)(mx - m - 1)$,
故选B.

【标注】 【知识点】二次项系数不为 ± 1 的十字相乘

8. 分解因式:

(1) $mnx^2 + (m^2 + n^2)x + mn$.

(2) $abx^2 - (a^2 + b^2)x - (a^2 - b^2)$.

(3) $x^2 - (6p + 5q)x + 9p^2 + 15pq + 6q^2$.

【答案】 (1) $(mx + n)(nx + m)$.

(2) $(ax + a - b)(bx - a - b)$.

(3) $(x - 3p - 2q)(x - 3p - 3q)$.

【解析】 (1) 原式 $= (mx + n)(nx + m)$.

(2) 原式 $= abx^2 - (a^2 + b^2)x - (a + b)(a - b)$
 $= [ax + (a - b)][bx - (a + b)]$
 $= (ax + a - b)(bx - a - b)$.

(3) 原式 $= x^2 - (6p + 5q)x + (3p + 2q)(3p + 3q)$
 $= [x - (3p + 2q)][x - (3p + 3q)]$
 $= (x - 3p - 2q)(x - 3p - 3q)$.

【标注】【知识点】系数为整式的十字相乘

9. 分解因式：

(1) $abcx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + abc$.

(2) $kx^2 + k^2x + x + k^2 - 1$.

(3) $x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2$.

(4) $x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6$.

(5) $a^2 + ab - 6b^2 + 5a + 35b - 36$.

(6) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20$.

【答案】(1) $(abx + c)(cx + ab)$.

(2) $(kx + k + 1)(x + k - 1)$.

(3) $(x^2 + a^2 + b^2 + 2ab)(x^2 + a^2 + b^2 - 2ab)$.

(4) $(x + 3y - 2)(x - 2y + 3)$.

(5) $(a + 3b - 4)(a - 2b + 9)$.

(6) $(2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

【解析】(1) 原式 $= ab \cdot cx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + ab \cdot c = (abx + c)(cx + ab)$.

(2) 原式 $= kx^2 + (k^2 + 1)x + (k + 1)(k - 1) = (kx + k + 1)(x + k - 1)$.

(3) 原式 $= x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = [x^2 + (a^2 + b^2)]^2 - (2ab)^2$
 $= (x^2 + a^2 + b^2 + 2ab)(x^2 + a^2 + b^2 - 2ab)$.

(4) 原式 $= x^2 + (y + 1)x + (-3y + 2)(2y - 3) = (x + 3y - 2)(x - 2y + 3)$.

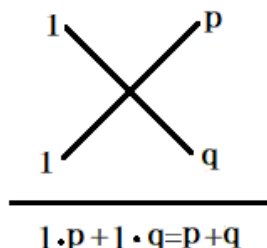
(5) 原式 $= a^2 + (b + 5)a + (-3b + 4)(2b - 9) = (a + 3b - 4)(a - 2b + 9)$.

(6) 原式 $= 6x^2 + (2 - 5y)x + (-3y + 4)(2y - 5) = (2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

【标注】【知识点】公式法综合应用

双十字相乘法

复习：前面我们学过整式乘法知识，可以进行如下运算： $(x+p)(x+q)=$ _____、其中 p 、 q 为常数，根据系数之间的关系我们可以画出这样的十字来快速解决；



反过来，要对二次三项式 $x^2 + ax + b$ 作因式分解，

如果常数项 b 可以分解为_____的积，并且有 $p + q = a$ ，那么_____。这个过程也可画出十字来得到，就是分解因式的十字相乘法。

引入：

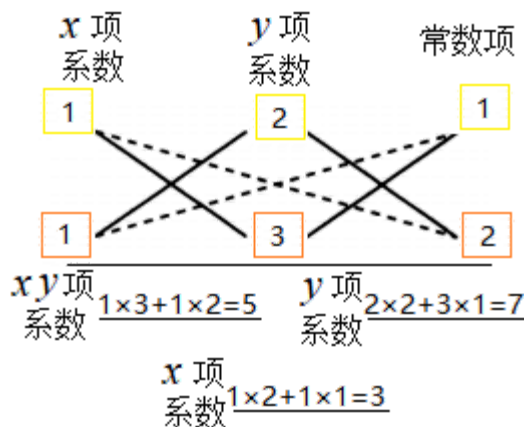
请完成下列整式乘法（请将结果中的高次项写在前面），并观察等号两端的式子、尝试回答后面的问题：

① $(x + 2y + 1)(x + 3y + 2) =$ _____；

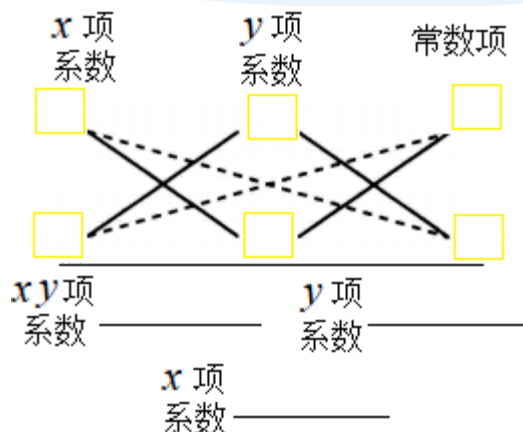
② $(x + 2y - 1)(x - 3y + 2) =$ _____；

③ 上面两个等式左端是两个 _____ 次 _____ 项式的乘积，等号右端前三项都是 _____ 次项、第四项和第五项是 _____ 次项、常数项是左端 _____ 项的乘积；

④ 类比前面的十字相乘法我们可以画出双十字快速解决上面的整式乘法，其中① 中的双十字如下：



请尝试完成② 中的双十字：



⑤ 请画出新的双十字来快速算出下面的整式乘法：

$$(x + 2y + 1)(x + 3y - 2) = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

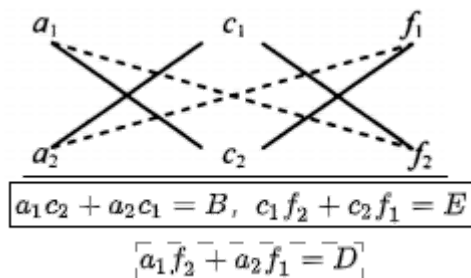
$$(x + 2y - 3)(2x + 3y + 4) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【总结】一般地， $(a_1x + c_1y + f_1)(a_2x + c_2y + f_2) = \underline{\hspace{2cm}} .$

其中常数 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 满足：① $A = a_1a_2$ ， $C = c_1c_2$ ， $F = f_1f_2$ ，

② $a_1c_2 + a_2c_1 = B$ ， $c_1f_2 + c_2f_1 = E$ ， $a_1f_2 + a_2f_1 = D$ ，

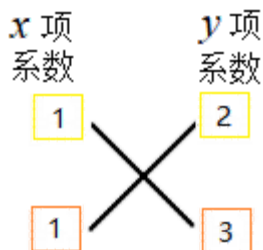
用双十字法可以画出来快速解决。



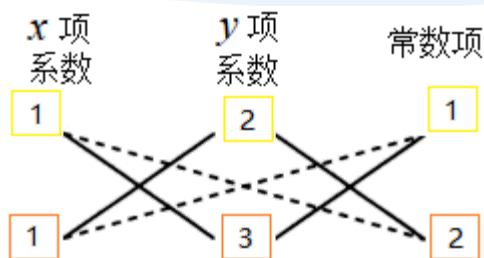
反过来，我们也可以用双十字法来分解含两个字母及以上的二次多项式，

比如，要分解 $x^2 + 5xy + 6y^2 + 3x + 7y + 2$ ，

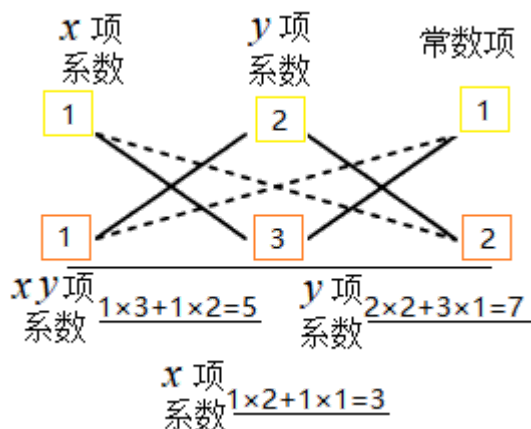
我们先把前三项用十字相乘法分解，如下图



再在右边一列添上常数项 2 的因数、如下图，验证三个交叉相乘的乘积是否分别等于原式的 x 项系数、 y 项系数；



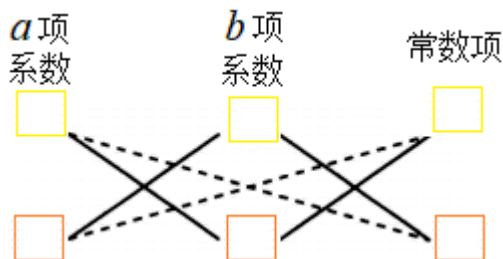
验证发现这些乘积分别与两个系数相等，



因此两行各数（从左到右）分别是两个因式 x 项系数、 y 项系数和常数项，即

$$x^2 + 5xy + 6y^2 + 3x + 7y + 2 = (x + 2y + 1)(x + 3y + 2);$$

再比如，要分解 $6a^2 + 11ab + 3b^2 + 4a - b - 2$ ，画出双十字如下：



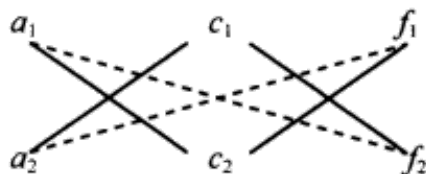
因此 $6a^2 + 11ab + 3b^2 + 4a - b - 2 =$ _____ .

【总结】

双十字相乘法可用于分解 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ 型的多项式，

其中常数 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 要满足条件：① $A = a_1a_2$ ， $C = c_1c_2$ ， $F = f_1f_2$ ，

② $a_1c_2 + a_2c_1 = B$ ， $c_1f_2 + c_2f_1 = E$ ， $a_1f_2 + a_2f_1 = D$ ，即：



则 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F =$ _____ .

【教法备注】

复习：前面我们学过整式乘法知识，可以进行如下运算： $(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$ ，其中 p 、 q 为常数，根据系数之间的关系我们可以画出这样的十字来快速解决；

$$\begin{array}{cc}
 1 & p \\
 q & 1 \\
 \hline
 1 \cdot p + 1 \cdot q = p + q
 \end{array}$$

反过来，要对二次三项式 x^2+ax+b 作因式分解，

如果常数项 b 可以分解为 pq 的积，并且有 $p+q=a$ ，那么 $x^2+ax+b=x^2+(p+q)x+pq$ 。这个过程也可画出十字来得到，就是分解因式的十字相乘法。

引入：

请完成下列整式乘法（请将结果中的高次项写在前面），并观察等号两端的式子、尝试回答后面的问题：

① $(x+2y+1)(x+3y+2)=x^2+5xy+6y^2+3x+7y+2$ ；

② $(x+2y-1)(x-3y+2)=x^2-xy-6y^2+x+7y-2$ ；

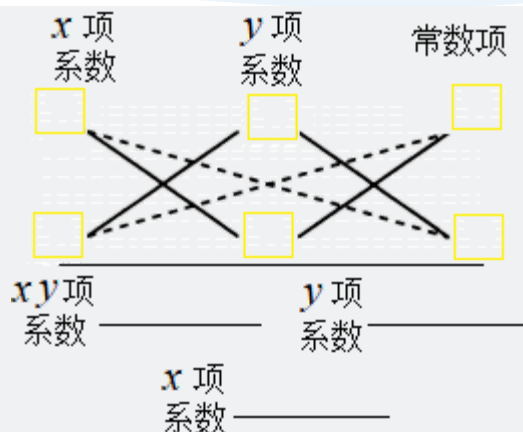
③ 上面两个等式左端是两个一次三项式的乘积，等号右端前三项都是二次项、第四项和第五项是一次项、常数项是左端（一次式）常数项的乘积；

④ 类比前面的十字相乘法我们可以画出双十字快速解决上面的整式乘法，

其中①中的双十字如下：

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} x \text{ 项} \\ \text{系数} \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} y \text{ 项} \\ \text{系数} \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} \text{常数项} \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} xy \text{ 项} \\ \text{系数} \\ 1 \times 3 + 1 \times 2 = 5 \end{array} & \begin{array}{c} y \text{ 项} \\ \text{系数} \\ 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 \end{array} & \\
 \begin{array}{c} x \text{ 项} \\ \text{系数} \\ 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3 \end{array} & &
 \end{array}$$

请尝试完成②中的双十字：



⑤ 请画出新的双十字来快速算出下面的整式乘法：

$$(x + 2y + 1)(x + 3y - 2) = x^2 + 5xy + 6y^2 - x - y - 2 ;$$

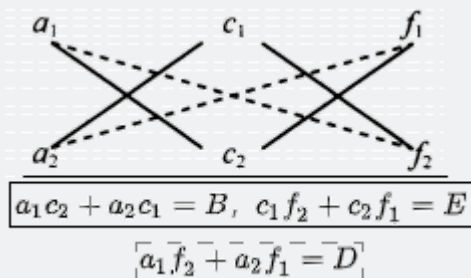
$$(x + 2y - 3)(2x + 3y + 4) = 2x^2 - 7xy + 6y^2 - 2x - y - 12 .$$

总结：一般地， $(a_1x + c_1y + f_1)(a_2x + c_2y + f_2) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$

其中常数 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 满足：① $A = a_1a_2$ ， $C = c_1c_2$ ， $F = f_1f_2$ ，

② $a_1c_2 + a_2c_1 = B$ ， $c_1f_2 + c_2f_1 = E$ ， $a_1f_2 + a_2f_1 = D$ ，

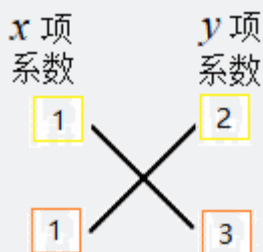
用双十字法可以画出来快速解决。



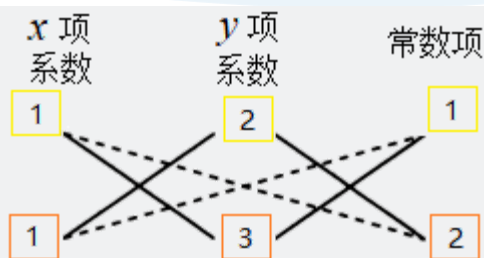
反过来，我们也可以用双十字法来分解含两个字母及以上的二次多项式，

比如，要分解 $x^2 + 5xy + 6y^2 + 3x + 7y + 2$ ，

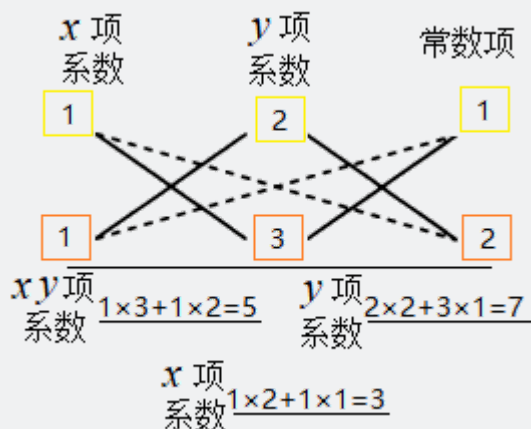
我们先把前三项用十字相乘法分解，如下图



再在右边一列添上常数项 2 的因数、如下图，验证三个交叉相乘的乘积是否分别等于原式的 x 项系数、 y 项系数；



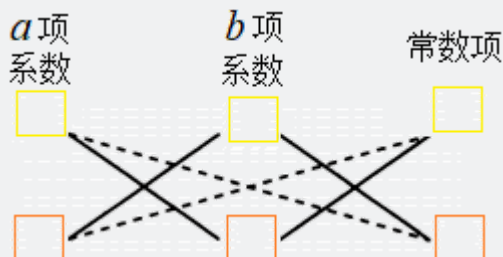
验证发现这些乘积分别与两个系数相等，



因此两行各数（从左到右）分别是两个因式 x 项系数、 y 项系数和常数项，即

$$x^2 + 5xy + 6y^2 + 3x + 7y + 2 = (x + 2y + 1)(x + 3y + 2);$$

再比如，要分解 $6a^2 + 11ab + 3b^2 + 4a - b - 2$ ，画出双十字如下：



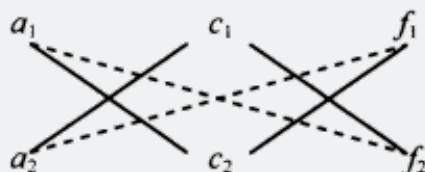
因此 $6a^2 + 11ab + 3b^2 + 4a - b - 2 = (2a + 3b + 2)(3a + b - 1)$ 。

【总结】

双十字相乘法可用于分解 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ 型的多项式，

其中常数 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 要满足条件：① $A = a_1a_2$ ， $C = c_1c_2$ ， $F = f_1f_2$ ，

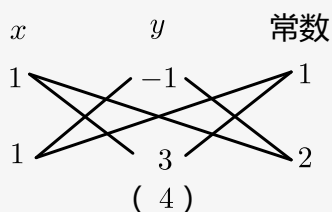
② $a_1c_2 + a_2c_1 = B$ ， $c_1f_2 + c_2f_1 = E$ ， $a_1f_2 + a_2f_1 = D$ ，即：



则 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = (a_1x + c_1y + f_1)(a_2x + c_2y + f_2)$ 。

例题

10. 分解因式：



便得到所需要的分解： $x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2 = (x - y + 1)(x + 3y + 2)$

(2) 将原式写成关于 x 的二次三项式： $3x^2 + (4y + 8)x - 4y^2 - 8y - 3$,

$-4y^2 - 8y - 3$ 可以用十字相乘法分解为： $-4y^2 - 8y - 3 = -(2y + 1)(2y + 3)$

再次运用十字相乘法可得，原式= $(3x - 2y - 1)(x + 2y + 3)$ 。

【标注】【知识点】双十字相乘法

11. 双十字相乘法：

(1) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20$.

(2) $10x^2 - 4y^2 + 18xy - 11x + 11y - 6$.

(3) $x^2 + 2(a + b)x - 3a^2 + 10ab - 3b^2$.

【答案】 (1) $(2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

(2) $(5x - y + 2)(2x + 4y - 3)$.

(3) $(x - a + 3b)(x + 3a - b)$.

【解析】 (1) 原式= $(2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

(2) 原式= $(5x - y + 2)(2x + 4y - 3)$.

(3) 原式= $(x - a + 3b)(x + 3a - b)$.

【标注】【知识点】双十字相乘法

12. 分解因式：

(1) $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$

(2) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$

【答案】 (1) $(x - y + 4)(x + y + 1)$.

(2) $(x - y - 3)(x + y + 1)$.

【解析】 (1) 原式 $= x^2 + 5x - y^2 + 3y + 4$
 $= (x - y + 4)(x + y + 1)$.

(2) 原式 $= x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3$
 $= (x - y - 3)(x + y + 1)$.

【标注】【知识点】双十字相乘法

13. 因式分解：

(1) $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$.

(2) $6x^2 + xy - 2y^2 + 2x - 8y - 8$.

【答案】 (1) $(x + y + 1)(x - y + 4)$.

(2) $(2x - y - 2)(3x + 2y + 4)$.

【解析】 (1) 原式 $= x^2 + 5x - (y^2 - 3y - 4)$
 $= x^2 + 5x - (y + 1)(y - 4)$
 $= (x + y + 1)(x - y + 4)$.

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= 6x^2 + (y+2)x - 2(y^2 + 4y + 4) \\
 &= [2x - (y+2)][3x + 2(y+2)] \\
 &= (2x - y - 2)(3x + 2y + 4).
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】与提公因式结合的十字相乘

|| 例题

14. 当 m 取何值时, 多项式 $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + m$ 可以分解成两个一次因式的积().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】 $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + m = (3x - y + 2)(4x - 2y + 1)$ 可用双十字相乘、主元法或者待定系数法解决此题.

【标注】【知识点】双十字相乘法

|| 练习

15. m 为什么数时, $x^2 + 7xy - 18y^2 - 5x + my - 24$ 可以分解为两个一次因式的积?().
- A. 10 B. 43或-78 C. 12 D. 13

【答案】B

【解析】 $\because x^2 + 7xy - 18y^2 - 5x + my - 24 = (x + 9y + 3)(x - 2y - 8)$ 或
 $x^2 + 7xy - 18y^2 - 5x + my - 24 = (x + 9y - 8)(x - 2y + 3),$
 $\therefore m = 43 \text{ 或 } -78.$

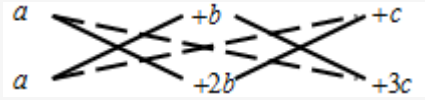
【标注】【知识点】双十字相乘法

|| 例题

16. 因式分解: $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 3ab + 4ac + 5bc.$

【答案】 $(a + b + c)(a + 2b + 3c)$

【解析】 应用双十字相乘法：



$\therefore$ 原式 $= (a + b + c)(a + 2b + 3c)$.

【标注】 【知识点】 双十字相乘法

17. 因式分解： $3x^2 - 4y^2 + 3z^2 - 4xy - 10xz - 4yz$.

【答案】 $(3x + 2y - z)(x - 2y - 3z)$.

【解析】 双十字相乘， $(3x + 2y - z)(x - 2y - 3z)$.

故答案为： $(3x + 2y - z)(x - 2y - 3z)$.

【标注】 【知识点】 双十字相乘法

练习

18. 分解因式：

(1) $x^2 - y^2 + 5x + y + 6$.

(2) $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 2x - y - 12$.

(3) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + 2$.

(4) $x^2 + 2(a + b)x - 3a^2 + 10ab - 3b^2$.

【答案】(1) $(x + y + 2)(x - y + 3)$.

(2) $(x - 2y + 3)(2x - 3y - 4)$.

(3) $(3x - y + 2)(4x - 2y + 1)$.

(4) $(x - a + 3b)(x + 3a - b)$.

【解析】(1) $x^2 - y^2 + 5x + y + 6 = (x + y + 2)(x - y + 3)$.

(2) $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 2x - y - 12$

$= (x - 2y + 3)(2x - 3y - 4)$.

(3) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + 2 = (3x - y + 2)(4x - 2y + 1)$.

(4) 法1: 这是 x 的二次式, “常数项”可分解为

$-3a^2 + 10ab - 3b^2 = -(3a - b)(a - 3b)$

再对整个式子运用十字相乘

$x^2 + 2(a + b)x - 3a^2 + 10ab - 3b^2 = (x + 3a - b)(x - a + 3b)$

法2: 把 $x^2 + 2(a + b)x - 3a^2 + 10ab - 3b^2$ 看成 x 、 a 、 b 的二次齐次式,

对它采用双十字相乘

$x^2 + 2(a + b)x - 3a^2 + 10ab - 3b^2 = (x - a + 3b)(x + 3a - b)$.

【标注】【知识点】双十字相乘法

三、主元法

1. 分解含多个字母的多项式

在分解一个含有多个字母的多项式时, 选择 _____ 字母作为主要元素, 其他的字母当做已知数, 将多项式按照选定的字母按照 _____ 排列, 然后进行恰当的分组进行分解.

比如, 对 $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$ 进行因式分解, 选主元为 y 、并 _____ 排列得

原式 = _____

= _____

= _____.

【教法备注】

在分解一个含有多个字母的多项式时，选择一个字母作为主要元素，其他的字母当做已知数，将多项式按照选定的字母按照降幂排列，然后进行恰当的分组进行分解。

比如，对 $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$ 进行因式分解，选主元为 y 、并降幂排列得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (2x - z)y^2 + (2xz - 4x^2)y + (2x^3 - x^2z) \\ &= (2x - z)y^2 - 2x(2x - z)y + x^2(2x - z) \\ &= (2x - z)(x^2 - 2xy + y^2) = (2x - z)(x - y)^2.\end{aligned}$$

|| 例题

19. 分解因式： $a^2b - ab^2 + a^2c - ac^2 - 3abc + b^2c + bc^2$ 。

【答案】 $(a - b - c)(ab + ac - bc)$ 。

【解析】 这个多项式是 a 、 b 、 c 的三项式，项数多，似乎无从下手，解决它的方法却是最基本的：

把 a 当作主要字母，也就是把这个多项式看成 a 的二次式，按 a 降幂排列整理为：

$(b + c)a^2 - (b^2 + c^2 + 3bc)a + (b^2c + bc^2)$ ，后用十字相乘进行分解，“常数项”为

$$b^2c + bc^2 = bc(b + c),$$

$$a^2b - ab^2 + a^2c - ac^2 - 3abc + b^2c + bc^2$$

$$= [a - (b + c)][(b + c)a - bc]$$

$$= (a - b - c)(ab + ac - bc)。$$

【标注】 【知识点】选主元法

|| 练习

20. 分解因式：

$$(1) \quad y(y + 1)(x^2 + 1) + x(2y^2 + 2y + 1)。$$

$$(2) \quad (b + c)a^2 - (b^2 + c^2 + 3bc)a + b^2c + bc^2。$$

【答案】 (1) $(xy + y + 1)(xy + x + y)$.

(2) $(b + c - a)(bc - ab - ac)$.

【解析】 (1) 方法一：以 x 为主元 .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= y(y+1)x^2 + (2y^2 + 2y + 1)x + y(y+1) \\ &= (xy + y + 1)(xy + x + y) .\end{aligned}$$

方法二：以 y 为主元 .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^2 + 1 + 2x)y^2 + (x^2 + 1 + 2x)y + x \\ &= (x+1)^2y^2 + (x^2 + 2x + 1)y + x \\ &= (xy + y + 1)(xy + x + y) .\end{aligned}$$

(2) 方法一：以 a 为主元 .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (b+c)a^2 - (b^2 + 3bc + c^2)a + bc(b+c) \\ &= (a-b-c)(ab+ac-bc) .\end{aligned}$$

方法二：以 b 为主元 .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (c-a)b^2 + (a^2 - 3ac + c^2)b + a^2c - ac^2 \\ &= (c-a)b^2 + (a^2 - 3ac + c^2)b + ac(a-c) \\ &= (b+c-a)(bc-ab-ac) .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】选主元法

21. 分解因式： $2a^2b^2 + 10a^2b + 12a^2 - 3ab^2 - 15ab - 18a - b^2 - 5b - 6$.

【答案】 $(b+2)(b+3)(2a^2-3a-1)$

【解析】 此多项式项数太多，难以下手，但只要将处于同等地位中的 a ， b 任选一个视为“主元”，整理成关于 a (或 b)的二次三项式再分组，问题就简单多了 .

视“ a ”为主元，则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2(b^2 + 5b + 6)a^2 - 3(b^2 + 5b + 6)a - (b^2 + 5b + 6) \\ &= (b^2 + 5b + 6)(2a^2 - 3a - 1) \\ &= (b + 2)(b + 3)(2a^2 - 3a - 1)\end{aligned}$$

视“ b ”为主元，则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (2a^2 - 3a - 1)b^2 + 5(2a^2 - 3a - 1)b + 6(2a^2 - 3a - 1) \\ &= (2a^2 - 3a - 1)(b^2 + 5b + 6) \\ &= (b + 2)(b + 3)(2a^2 - 3a - 1).\end{aligned}$$

【标注】【知识点】选主元法

2. 分解次数较高的多项式

在分解一个含有多个字母的多项式、且其中有些字母的指数较高时，选择指数 _____ 的字母作为主要元素，其他的字母当做已知数，将多项式按照选定的字母按照 _____ 排列，然后进行恰当的分组进行分解。比如，对 $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$ 进行因式分解，观察到这是关于 z 的 _____ 次多项式，因此选主元为 _____、并 _____ 排列得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}}.\end{aligned}$$

【教法备注】

在分解一个含有多个字母的多项式、且其中有些字母的指数较高时，选择指数较低的字母作为主要元素，其他的字母当做已知数，将多项式按照选定的字母按照降幂排列，然后进行恰当的分组进行分解。比如，对 $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z$ 进行因式分解，观察到这是关于 z 的一次多项式，因此选主元为 z 、并降幂排列得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (-x^2 - y^2 + 2xy)z + (2x^3y - 4x^2y + 2xy^2) \\ &= -(x - y)^2z + 2x(x - y)^2 \\ &= (2x - z)(x - y)^2.\end{aligned}$$

|| 例题

22. 分解因式： $x^4 + x^2 + 2ax + 1 - a^2$ 。

【答案】 $(x^2 + 1 + a - x)(x^2 + 1 - a + x)$.

【解析】 此多项式是关于 x 的四次四项式，分解难度较大，若反客为主，视次数最低的字母 a 为主元，原多项式就可看成关于 a 的二次三项式，则易找到分解思路 .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -a^2 + 2xa + x^4 + x^2 + 1 \\ &= -[(a^2 - 2ax + x^2) - (x^4 + 2x^2 + 1)] \\ &= (x^2 + 1)^2 - (a - x)^2 \\ &= (x^2 + 1 + a - x)(x^2 + 1 - a + x) .\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 选主元法

练习

23. 分解因式： $(a + b)c^3 - (a^2 + ab + b^2)c^2 + a^2b^2$.

【答案】 $(a - c)(b - c)(ab + bc + ac)$.

【解析】 这是一个三元四次齐次六项式，多项式中含有三个字母 a, b, c ，且次数高，项数较多，无法直接分解 . 若反客为主，视次数较低的字母 a (或 b)为主元，原多项式就可看成关于 a (或 b)的二次三项式，即可迅速获解 .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (a^2 - c^2)b^2 + (c^3 - ac^2)b + (ac^3 - a^2c^3) \\ &= (a + c)(a - c)b^2 - c^2(a - c)b - ac^2(a - c) \\ &= (a - c)[(a + c)b^2 - c^2b - ac^2] \\ &= (a - c)[a(b + c) + bc](b - c) \\ &= (a - c)(b - c)(ab + bc + ac) .\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 选主元法